Probabilités et distributions discrètes

Exercice 1

Chez le porc, la couleur blanche de la robe (II: Landrace) domine le tacheté pie-noire (ii: Piétrain). Deux hybrides de première génération sont croisés entre-eux et donnent 7 descendants. Quelle est la probabilité que l'on ait, parmi ceux-ci, moins de 3 individus blancs?

Selon les lois de Mendel, la première génération, issue d'un croisement entre un homozygote dominant et un homozygote récessif, est composée uniquement d'individus hétérozygotes pour le caractère étudié. En ce qui concerne la seconde génération (issue de croisement entre des hétérozygotes), la répartition des génotypes est la suivante:

Gènes parentaux	**I**	**i**
I	II	Ii
i	Ii	ii

n=	7
Proba(blanc)=p=	0,75
Proba(noir)=q=	0,25

La formule à utiliser est la suivante: $P = C_n^r p^r q^{n-r}$ avec: $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

La probabilité d'avoir moins de 3 individus blancs= Proba(2 blancs)+Proba(1 blanc)+ Proba(0 blanc).

Proba(-de 3 blancs)= 0,01287842

Exercice 2

En race de Moyenne et Haute Belgique, on observe 3 phénotypes de robe: blanche, noire et bleue, correspondant respectivement aux génotypes NN, nn et Nn. Un taureau bleu est croisé avec 3 vaches bleues; quelle est la probabilité que, parmi les 3 produits, il y ait un blanc?

Il s'agit du même principe génétique que pour l'exercice précédent:

Gènes parentaux	**N**	**n**
N	NN	Nn
n	Nn	nn

n=	3
p=	0,25
q=	0,75

Proba (1NN) 0,421875

Autrement dit, il y a 42,1875% de chances d'avoir 1 veau blanc sur les 3 produits issus d'un croisement entre un taureau bleu et 3 vaches bleues.

Exercice 3

D'un jeu de 32 cartes, X tire une carte et la replace dans le jeu. A son tour, Y tire une carte. Quelle est la probabilité que tous deux aient tiré la même carte?

Probabilité que X tire une carte = 1/32 = 0,03125
Probabilité que Y tire une carte = 1/32 = 0,03125
Probabilité que X et Y tirent la même carte = 1/32*1/32*32 = 0,03125

Exercice 4

On jette deux fois consécutivement une paire de dés. Quelle est la probabilité d'avoir une fois 5 ? Au moins une fois 5? Deux fois 5?

Les combinaisons possibles pour obtenir 5 avec 2 dés à 6 faces sont les suivantes: 1 et 4, 2 et 3, 3 et 2, 4 et 1. Nous avons donc 4 possibilités sur 36 (6*6).

Proba (5) = 4/36 = 1/9 = 0,11111111
Proba (1x5) = proba de faire un 5 et autre chose qu'un 5 (1/9*8/9) + proba de faire autre chose qu'un 5 et un 5 (8/9*1/9) = 0,19753086
Proba (1x5) + proba (2x5)= 0,20987654
Proba (2x5)= 0,01234568

Exercice 5

Un variant génétique a, dans une population, la fréquence de 5 pour mille; combien d'animaux doit-on examiner pour avoir 9 chances sur 10 de rencontrer au moins une fois ce variant?

La probabilité d'observer le variant génétique chez un animal est de : 0,005
La probabilité de ne pas observer le variant génétique chez un animal est de : 0,995
La probabilité d'observer le variant génétique chez n animaux est de : (0,995)^n où ^ est le symbole utilisé pour l'exposant (dans le logiciel "excel"!
Pour résoudre ce problème, on peut utiliser l'égalité suivante (qui retourne le problème!!):
0,1=(0,995)^n, qui devient : log (0,1)= n log (0,995), puis : n = log (0,1) / log (0,995) qui donne:
n= 459,364764

Il faut donc examiner 460 animaux pour avoir 9 chances sur 10 de rencontrer au moins une fois le variant génétique en question!

Exercice 6

60 % des œufs de parasites entament leurs divisions cellulaires dans un certain milieu de culture. Quelle est la probabilité que, sur 8 œufs, 6 et plus aient commencé à se diviser?

p= 0,6
q= 0,4
n= 8

Proba(6 et +) = Proba (6) + proba (7) + proba (8)

Ce qui donne, en utilisant la formule de la loi binomiale vue plus haut:

$$P(6et+) = C_8^6(0.6)^6(0.4)^2 + C_8^7(0.6)^7(0.4)^1 + C_8^8(0.6)^8(0.4)^0$$

Et donc p(6 et +) = 0,31539456

Exercice 7

Considérant des nichées de 10 porcelets et en admettant une égale proportion des sexes, quelle est la probabilité qu'une nichée au hasard contienne plus de 7 mâles?

n= 10

p=	0,5
q=	0,5

Proba(8 mâles et +) = Proba (8 mâles) + proba (9 mâles) + proba (10 mâles)

Ce qui donne, en utilisant la formule de la loi binomiale vue plus haut:

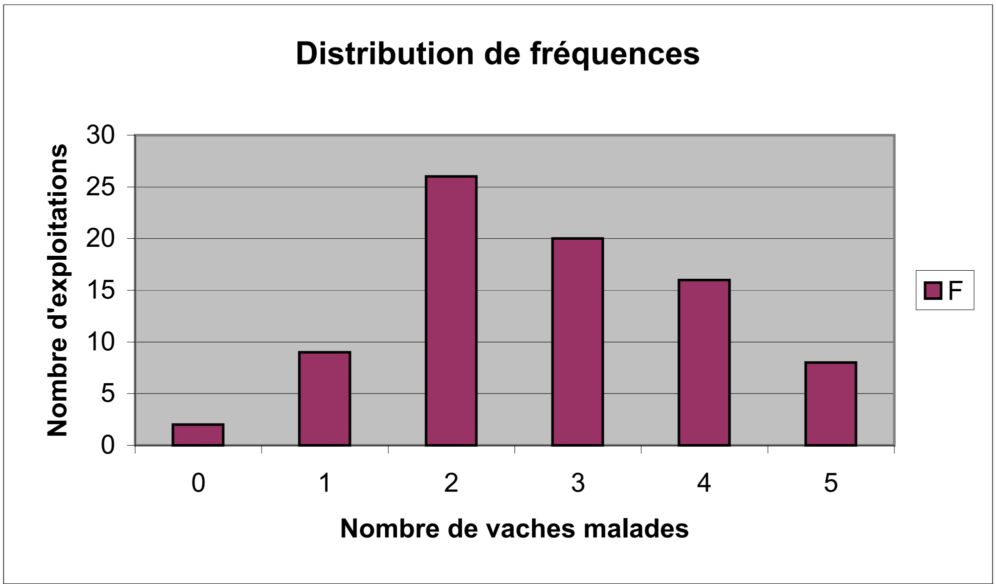
$$P(8et+) = C_{10}^{8}(0.5)^{8}(0.5)^{2} + C_{10}^{9}(0.5)^{9}(0.5)^{1} + C_{10}^{10}(0.5)^{10}(0.5)^{0}$$

Et donc p(8 et +) = 0,0546875

Exercice 8

CP	F	CP*F	F*CP*CP
0	2	0	0
1	9	9	9
2	26	52	104
3	20	60	180
4	16	64	256
5	8	40	200
	81	225	749

Nombre total de fermes:		81
Nombre moyen d'animaux malades	Sfx/sf	2,77777778
Variance	(SfX2-(SfX)^2/(Sf))/(Sf-1)	1,55
Deviation standard		1,24498996
Coefficient de variation	100*s/xb	44,8196386
Probabilité d'une vache malade	225/(81*10)	0,27777778



Exercice 9

Distribution de Poisson μ=0.1

k	P(k)			
0	0,90483742			
1	0,09048374	k>2	0,00467884	=> p = 0,99532116
2	0,00452419			
3	0,00015081	k>3	3,8468E-06	

Exercice 10

Loi binomiale

n		20			n		7
p		0,45			p		0,45
r	B[r]				r	B[r]	
0	6,4158E-06				0	0,01522435	
1	0,00010499				1	0,08719402	
2	0,00081603				2	0,21402168	
3	0,00400597				3	0,29184775	
4	0,01392986				4	0,23878452	
5	0,03647092				5	0,11722149	
6	0,0745996				6	0,0319695	
7	0,12207207	<>	0,00373669		7	0,00373669	
8	0,16230037						
9	0,17705495						
10	0,15934946						
11	0,11852439						
12	0,07273087						
13	0,03661974						
14	0,0149808						
15	0,00490281						
16	0,00125356						
17	0,00024133						
18	3,2908E-05						
19	2,8342E-06						
20	1,1594E-07						

Exercice 11

Distribution de Poisson	μ=0.01^2*1000=0.1		=> P(>0) = 1 - P(0) = 1 -exp(-μ) =	0,09516258
Distribution binomiale	p=0.0001	n=1000	=> B(>0) = 1 - B(0) =1 - 0.9^1000 =	0,09516711

Exercice 12

Loi hypergéométrique

p	0,3
q	0,6
r	0,1

H(12,8,0) = FACT(20)/(FACT(12)*FACT(8)*FACT(0))*0.3^12*0.6^8*0.1^0 0,00112443

Exercice 13

P=P(0)*Q(1)+P(1)*Q(0)

p1		0,2	p1		0,15		
n1		5	n1		5		
r1	B[r]		r1	B[r]			
0	0,32768		0	0,44370531			
1	0,4096		1	0,39150469		P=	0,31002995
2	0,2048		2	0,13817813			
3	0,0512		3	0,02438438			
4	0,0064		4	0,00215156			
5	0,00032		5	7,5938E-05			
	1			1			

Exercice 14

P(M1)*P(S2 | M1) + P(S1)*P(M2 | S1) = 2/50*48/49 + 48/50*2/49 = 2*2*48/(50*49) = 0,07836735

Loi hypergeom.= (fact(4)/fact(3)/fact(1)) * (fact(36)/fact(35)/fact(1)) / (fact(40)/fact(2)/fact(38)) 0,07836735

Exercice 15

Le dosage de substances radio-actives s'effectue en comptant le nombre de particules émises pendant un temps donné. Soit une source radio-active émettant, en moyenne, une particule par minute. Le comptage se poursuit pendant plusieurs centaines de minutes, pendant lesquelles les particules sont émises au hasard. Dans quel pourcentage de ces minutes:

a) N'y aura-t-il aucune particule émise?
b) Y aura-t-il une particule émise?
c) Y aura-t-il deux particules ou plus émises?

Tout d'abord, il faut savoir qu'une émission de particules suit une distribution de particules.

Moyenne = 1 particule par minute

La formule de Poisson est la suivante: $P_k = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$ Rappel : e = 2,71

a) Dans ce cas-ci k vaut zéro et donc P= 0,36900369 soit 36,9 %.

b) Ici k est égal à un et P = 0,36900369 soit 36,9 %.

c) Pour deux particules et plus, P = 0,26199262 soit 26,19%

Exercice 16

On ensemence une série de 20 tubes avec un même volume (0,1 ml) d'un liquide contenant des bactéries. Après incubation, 3 tubes sont restés stériles. Quelle est la concentration moyenne de ce liquide en bactéries?

Sur 20 tubes, 3 sont restés stériles; cela équivaut à dire que la probabilité d'avoir 3 tubes stérile sur 20 est égale à : 0,15 Dans ce cas-ci, k vaut zéro et donc :

$$\frac{3}{20} = P_0 = e^{-\mu} \frac{\mu_k}{k!}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{3}{20} = e^{-\mu}$$

et donc: $\mu =$ 1,89711998 soit: +/- 2 bactéties/0,1 ml

Exercice 17

Si la probabilité qu'un individu soit victime d'un choc sérique après injection d'un sérum donné est de 0,001, déterminez la probabilité que, parmi 2000 individus traités, soient victimes de ce choc: a) exactement 3 individus.
b) plus de 2 individus.

p= 0,001
n= 2000

Grâce à ces 2 données, nous trouvons la moyenne = 2

a) P(3 individus) =	0,18155163 soit 18,16 %
b) P(0 individu) =	0,13616372 soit 13,62 %
P(1 individu) =	0,27232745 soit 27,23 %
P(2 individus) =	0,27232745 soit 27,23 %
P(+ de 2 individus) =	0,31918138 soit 31,92 %