1ère baccalauréat en Sciences Vétérinaires
Biostatistiques – Travaux dirigés

Séance de TD n°2 : Résolution

1. On a lancé 120 fois un dé. Trouver la probabilité pour que le 4 apparaisse
   a) 18 fois ou moins
   b) 14 fois ou moins,

sous l'hypothèse que le dé est parfait (càd chaque face est équiprobable).

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète : lancer du dé à deux possibilités (4 ou Pas le 4) avec une taille d'échantillon déterminée (N=120) et une prévalence connue (probabilité d'avoir 4 sur un dé = 1/6)

a) On demande la P(r<=18). Si on utilise la formule de la distribution binomiale classique, on devrait calculer la probabilité pour chaque valeur de r de 0 à 18 et en faire la somme. Sans logiciel, cela prendrait un temps considérable. Donc, comme n est grand, on peut utiliser l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On calcule donc notre valeur de Z :

$$Z = \frac{18 - 120 * \frac{1}{6}}{\sqrt{120 * \frac{1}{6} * \frac{5}{6}}} = -0{,}489$$

⇨ P(r <= 18) = P(z < -0,489)

Pour calculer la P(z < -0,489), on doit aller dans la table des Z.

Dans la table des Z, en rose ce sont les valeurs de Z et dans le tableau croisé, ce sont les probabilités de se trouver entre la moyenne (= 0) et cette valeur de Z. De plus, pour rappel, la distribution de Z est symétrique. Donc la probabilité de se trouver entre 0 et 0,5 est la même que la probabilité de se trouver entre 0 et -0,5.

On voit dans la table que P(0 < Z < 0,49) = 0,1879 = P(-0,49 < Z < 0)

Ce qu'on souhaite c'est la probabilité d'être inférieure à -0,49. On sait que la probabilité totale de la distribution = 1, et donc que la probabilité de la moitié de la distribution = P(Z< 0) ou P(Z > 0) = 0,5 (comme la distribution est symmétrique).

⇨ P(Z < -0,49) = P(Z < 0) – P(-0,49 < Z < 0) = 0,5 – 0,1879 = 0,3121

b) On demande la P(r<=14). Si on utilise la formule de la distribution binomiale classique, on devrait calculer la probabilité pour chaque valeur de r de 0 à 14 et en faire la somme. Sans logiciel, cela prendrait un temps considérable. Donc, comme n est grand, on peut utiliser l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On calcule donc notre valeur de Z :

$$Z = \frac{14 - 120 * \frac{1}{6}}{\sqrt{120 * \frac{1}{6} * \frac{5}{6}}} = -1{,}4696$$

- ⇨ P(r <= 14) = P(Z < -1,4696)

Pour calculer la P(Z < -1,4696), on doit aller dans la table des Z.

On trouve dans la table que la probabilité de se trouver entre la moyenne (= 0) et 1,47 = 0,4292

- ⇨ P(Z < -1,4696) = P(Z < 0) – P(-1,47 < Z < 0) = 0,5 – 0,4292 = 0,0708

2. Si, dans une race bovine, la durée moyenne de gestation est de 280 jours avec déviation standard égale à 5, quelle est la proportion des vaches dont la durée de gestation s'écarte de +/- 10 jours de la moyenne ?

REPONSE :

Nous sommes dans une distribution normale : distribution continue (= durée de gestation en jours) et on nous donne la moyenne et la déviation standard de la population.

On va donc passer par la distribution de Z.

La question sous forme statistique = P(X < 280-10) ET P(X > 280+10)

Calculons la P(X < 270) :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{270 - 280}{5} = -2$$

On va dans la table des Z : La probabilité que Z se trouve entre 0 et -2 = 0,4772

P(X < 270) = P(Z < -2) = P(Z < 0) – P(-2 < Z < 0) = 0,5 – 0,4772 = 0,0228

Ensuite, calculons la P(X > 290) :

$$Z = \frac{290 - 280}{5} = 2$$

On va dans la table des Z : La probabilité que Z se trouve entre 0 et 2 = 0,4772

P(X > 290) = P(Z > 2) = P(Z > 0) – P(2 > Z > 0) = 0,5 – 0,4772 = 0,0228

- ⇨ P(X < 280-10) ET P(X > 280+10) = P(X < 270) + P(X > 290) = 0,0228 + 0,0228 = 0,0456

3. Sachant que, en moyenne, 50 % des œufs donnent des poussins mâles, combien d'œufs faut-il mettre en incubation pour avoir au moins 20 poulettes, dans 99,9 % des cas ?

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète : sexe œufs (mâle ou femelle) avec une taille d'échantillon à trouver (N= ?) et une prévalence connue (probabilité d'avoir un mâle = 0,5 = probabilité d'avoir une poulette). On nous dis également que la probabilité d'avoir au moins 20 poulette = 0,999 => P(r >= 20) = 0,999

Nous nous trouvons face à un calcul compliqué à faire avec la distribution binomiale. Nous allons donc passer par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On sait que P(r >= 20) = 0,999 => on peut en déduire la valeur de Z associée en utilisant la table dans le sens inverse :

P (r >=20) = 0,999 = P(Z > ?)

- ⇨ On peut en déduire que Z sera négatif, comme la probabilité d'être plus grand que cette valeur est supérieure à 0,5.

Comme dans la table, on nous donne la probabilité de se trouver entre 0 et Z, on doit chercher la valeur de Z associée à une probabilité de 0,999-0,5 = 0,499. On regarde donc dans les probabilités où se trouve 0,499 et on voit que c'est associé à un Z de 3,09. Notre valeur de Z égale donc -3,09.

$$-3{,}09 = \frac{20 - n * 0{,}5}{\sqrt{n * 0{,}5 * 0{,}5}}$$

- ⇨ $-3{,}09 * \sqrt{n * 0{,}25} = 20 - n * 0{,}5$
- ⇨ $Mise\ au\ carré : (-3{,}09)^2 * 0{,}25 * n = (20 - n * 0{,}5)^2$
- ⇨ $2{,}387 * n = 20^2 + 0{,}25 * n^2 - 2 * 20 * n * 0{,}5$
- ⇨ $2{,}387 * n = 400 + 0{,}25 * n^2 - 20 * n$
- ⇨ $-0{,}25 * n^2 + 2{,}387 * n + 20 * n - 400 = 0$
- ⇨ $-0{,}25 * n^2 + 22{,}387 * n - 400 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = (22{,}387)^2 - 4 * (-0{,}25) * (-400) = 101{,}178$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-22{,}387\ \pm \sqrt{101{,}178}}{2 * (-0{,}25)} = 24{,}66\ ou\ 64{,}89$$

La valeur de 24,66 est absurde vu que la prévalence est de 50%. Il est impossible d'avoir plus de 20 poulettes si on a que 25 œufs avec une prévalence de 50%. Donc, on peut conclure qu'il faut mettre 65 œufs en incubation pour avoir au moins 20 poulettes.

4. Quelle proportion de l'aire délimitée par la courbe de Gauss et l'axe des X, est comprise entre les limites suivantes :

a) de - l'infini à -2,94
b) de -0,54 à 1,24
c) de +1,84 à +2,31
d) de +2,51 à + l'infini

REPONSE :

Cette exercice vous aide à utiliser la table des Z.

a. $P(Z < -2,94)$

On va voir dans la table des Z à 2,94 et on obtient une probabilité de 0,4984. Cette probabilité est la probabilité de se trouver entre 0 et 2,94 (ou entre 0 et -2,94) = $P(-2,94 < Z < 0)$

Comme on sait que la moitié de la distribution = 0,5 = $P(Z < 0) = 0,5$, on peut en déduire que

$P(Z < -2,94) = P(Z < 0) - P(-2,94 < Z < 0) = 0,5 – 0,4984 = 0,0016$

b. $P(-0,54 < Z < 1,24)$

On va voir dans la table des Z, d'abord à 1,24 et on trouve une probabilité de 0,3924 = $P(0 < Z < 1,24)$. Ensuite, on va voir à 0,54 et on trouve une probabilité de 0,2054 = $P(0 < Z < 0,54) = P(-0,54 < Z < 0)$

Donc, $P(-0,54 < Z < 1,24) = P(-0,54 < Z < 0) + P(0 < Z < 1,24) = 0,3924 + 0,2054 = 0,5978$

c. $P(1,84 < Z < 2,31)$

On va voir dans la table des Z à 1,84 et on obtient une probabilité de 0,4671 = $P(0 < Z < 1,84)$.
Ensuite, on va voir dans la table des Z à 2,31 et on obtient une probabilité de 0,4896 = $P(0 < Z < 2,31)$

$P(1,84 < Z < 2,31) = P(0 < Z < 2,31) - P(0 < Z < 1,84) = 0,4896 – 0,4671 = 0,0225$

d. $P(Z > 2,51)$

On va voir dans la table des Z à 2,51 et on obtient une probabilité de 0,4940 = $P(0 < Z < 2,51)$.
On sait que la moitié de la courbe = 0,5 = $P(Z > 0)$.

$P(Z > 2,51) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 2,51) = 0,5 – 0,4940 = 0,006$

5. On a calculé les numérations globulaires (en 10 exp.6/mm³) de 20 porcelets âgés de 20 semaines :

4,3	6,4	7,4	9,1
5,2	6,6	7,5	9,3
5,3	6,7	7,8	
5,8	6,9	8,0	
6,0	7,1	8,4	
6,3	7,2	8,7	

a) On demande de calculer la moyenne et la variance observées de cet échantillon de données.

b) Si cet échantillon provient d'une population distribuée normalement avec moyenne de 7 et déviation standard de 1,2, on demande quel pourcentage théorique de porcelets aurait une numération supérieure à 9 ? Observe-t-on le même pourcentage dans l'échantillon ?

c) Un porcelet, ayant reçu une alimentation spéciale, a une numération de 9,2. Quelle est la probabilité qu'une numération aussi élevée soit due uniquement à la chance ?

REPONSE :

a) $Moyenne = \bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{4{,}3+6{,}4+7{,}4+9{,}1+5{,}2+6{,}6+7{,}5+9{,}3+5{,}3+6{,}7+7{,}8+5{,}8+6{,}9+8{,}0+6{,}0+7{,}1+8{,}4+6{,}3+7{,}2+8{,}7}{20} = \frac{140}{20} = 7$

$$variance = s^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n-1}$$
$$= ((4{,}3-7)^2 + (6{,}4-7)^2 + (7{,}4-7)^2 + (9{,}1-7)^2 + (5{,}2-7)^2 + (6{,}6-7)^2 + (7{,}5-7)^2 + (9{,}3-7)^2 + (5{,}3-7)^2 + (6{,}7-7)^2 + (7{,}8-7)^2 + (5{,}8-7)^2 + (6{,}9-7)^2 + (8{,}0-7)^2 + (6{,}0-7)^2 + (7{,}1-7)^2 + (8{,}4-7)^2 + (6{,}3-7)^2 + (7{,}2-7)^2 + (8{,}7-7)^2)/(20-1)$$
$$= 33{,}62/19 = 1{,}7695$$

b)

Pourcentage théorique :

Nous sommes dans une distribution normale : distribution continue (= numération globulaire) et on nous donne la moyenne et la déviation standard de la population.

On va donc passer par la distribution de Z.

La question sous forme statistique = P(X > 9)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{9-7}{1{,}2} = 1{,}667$$

On va dans la table des Z : La probabilité que Z se trouve entre 0 et 1,667 = 0,4525

P(X > 9) = P(Z > 1,667) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 1,667) = 0,5 – 0,4525 = 0,0475

En pourcentage, cela fait 4,75% de porcelets qui auront une numération supérieure à 9.

Pourcentage observé :

On compte dans l'échantillon le nombre de porcelets ayant une numération supérieure à 9. On en trouve 2 : 9,1 et 9,3. On a donc une probabilité de 2/20. En pourcentage cela correspond à 10%.

c)

Nous sommes dans une distribution normale : distribution continue (= numération globulaire) et on nous donne la moyenne et la déviation standard de la population.

On va donc passer par la distribution de Z.

La question sous forme statistique = P(X > 9,2)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{9{,}2 - 7}{1{,}2} = 1{,}833$$

On va dans la table des Z : La probabilité que Z se trouve entre 0 et 1,833 = 0,4664

P(X > 9,2) = P(Z > 1,833) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 1,833) = 0,5 – 0,4664 = 0,0336

6. On considère généralement que le poids des enfants à la naissance suit une distribution normale, de moyenne 3,4 kg et de variance 0,25 kg². On suspecte cependant que les femmes diabétiques mettent au monde des enfants qui ont en moyenne un poids inférieur à 3,4 kg. Afin de vérifier cette hypothèse, on a relevé le poids de 25 enfants nés de mères diabétiques et le poids moyen observé a été de 3,3 kg. On demande :

a) Quelle est la probabilité d'observer un poids moyen aussi élevé ou plus élevé si les enfants nés de mères diabétiques obéissent à la loi générale ?

b) Quelle hypothèse acceptera-t-on ?

REPONSE :

a) Nous sommes dans une distribution normale (information donnée dans l'énoncé). On va donc passer par la distribution de Z.

La question sous forme statistique = P($\bar{X}$> 3,3). Attention que dans ce cas, on compare une moyenne d'échantillon à la distribution. On doit donc utiliser comme déviation standard, la déviation standard de la moyenne c'est-à-dire l'erreur standard :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{3{,}3 - 3{,}4}{\frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{25}}} = -1$$

On va dans la table des Z : La probabilité que Z se trouve entre 0 et 1 (ou -1) = 0,3413

P($\bar{X}$> 3,3) = P(Z > -1) = P(-1 < Z < 0) + P(Z > 0) = 0,3413 + 0,5 = 0,8413

b) H_0 : Le poids des enfants de mères diabétiques = Le poids des enfants de mères non-diabétiques.
H_1 : Le poids des enfants de mères diabétiques < Poids des enfants de mères non-diabétiques.

On doit donc calculer la probabilité d'avoir un poids inférieure à 3,3 chez les mères non-diabétiques. Cela afin de voir si le poids observé chez les enfants de mères diabétiques est fréquent ou non chez les enfants de mères non-diabétiques.

Comme on a calculé au point précédent P($\bar{X}$> 3,3), P($\bar{X}$ < 3,3) = 1- P($\bar{X}$> 3,3) = 1-0,8413 = 0,1587.

Cette probabilité est plus grande que 0,05 (valeur seuil de rejet). On peut donc conclure qu'avoir un poids moyen de 3,3 pour des enfants de mères diabétiques est assez fréquent (à

15,87%) chez les enfants de mères non-diabétiques. On accepte donc H_0.

7. Dans une population humaine, la quantité d'urée dans le sang, exprimée en mg %, est une variable aléatoire normale de moyenne 27 et d'écart-type 5 chez les hommes, tandis que chez les femmes, la moyenne est de 26,4 et la variance 64.

a) Lorsqu'on prend un individu au hasard, calculez la probabilité que son urémie soit inférieure à 22,4 mg % suivant qu'il s'agit d'un homme ou d'une femme.

b) Déterminez une limite x1, appelée seuil pathologique, telle qu'il y ait 2,5 % d'hommes dont l'urémie est supérieure à x1.

REPONSE :

a) On est dans une distribution normale. On passe par la distribution de Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Chez les hommes :

$$Z = \frac{22{,}4 - 27}{5} = -0{,}92$$

P(X < 22,4) = P(Z < -0,92).

On va voir dans la table des Z : la probabilité d'être entre 0 et 0,92 (ou -0,92 ; symétrie) = 0,3212

P(X < 22,4) = P(Z < -0,92) = P(Z < 0) – P(-0,92 < Z < 0) = 0,5 – 0,3212 = **0,1788**

Chez les femmes:

$$Z = \frac{22{,}4 - 26{,}4}{\sqrt{64}} = -0{,}5$$

P(X < 22,4) = P(Z < -0,5).

On va voir dans la table des Z : la probabilité d'être entre 0 et 0,5 (ou -0,5 ; symétrie) = 0,1915

P(X < 22,4) = P(Z < -0,5) = P(Z < 0) – P(-0,5 < Z < 0) = 0,5 – 0,1915 = **0,3085**

b) En terme statistique la question signifie : P(X > x1) = 0,025.

Il faut donc utiliser la distribution de Z dans l'autre sens : Partir de la probabilité pour trouver la valeur de Z correspondante et transformer cette valeur de Z en X grâce à la formule.

On peut déjà déduire que x1 sera positif : on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est inférieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté droit de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(0 < Z < z1) = P(Z > 0) – P(Z > z1) = 0,5 – 0,025 = 0,475.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,475 est de 1,96.

$$1{,}96 = \frac{x1 - 27}{5}$$

$$1{,}96 * 5 + 27 = x1$$

x1 = 36,8

8. Dans un élevage de souris, la taille des portées est en moyenne de 10 jeunes, avec déviation standard 2,5. Combien faut-il produire de nichées pour avoir 97,5 chances sur 100 de produire au moins 50 jeunes ? On admet que la taille des portées est distribuée normalement.

REPONSE :

On se trouve dans une distribution normale. On est même dans une distribution normale de moyenne. Il faut donc passer par la formule de Z mais en l'adaptant pour prendre en compte le fait qu'on est dans une distribution de moyenne.

Pour une nichée, la moyenne = 10. Pour *n* nichées, la moyenne = n*10 (=la somme des moyennes des n nichées).
Pour une nichée, la variance = $2,5^2$. Pour *n* nichées, la variance = n*$2,5^2$ (=la somme des variances des n nichées). Dès lors, la déviation standard pour *n* nichées = $\sqrt{n} * 2,5$

La formule de Z devient donc :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - n * 10}{\sqrt{n} * 2,5}$$

A présent, la question est de connaitre la valeur de n, si P(X > 50) = 0,975. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse : partir de la probabilité pour trouver notre valeur de Z.

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,975 – 0,5 = 0,475.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,475 est de 1,96. Z1 = -1,96

$$-1,96 = \frac{50 - n * 10}{\sqrt{n} * 2,5}$$

- ⇨ $-1,96 * 2,5 * \sqrt{n} = 50 - 10 * n$
- ⇨ $Mise\ au\ carré: (-4,9)^2 * n = 50^2 + 100 * n^2 + 2 * 50 * n$
- ⇨ $24,01 * n - 2500 - 100 * n^2 - 100 * n = 0$
- ⇨ $-100 * n^2 + 1024,01 * n - 2500 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = 1024,01^2 - 4 * (-100) * (-2500) = 48596,4801$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-1024,01 \pm \sqrt{48596,4801}}{2 * (-100)} = 4,0178\ ou\ 6,22$$

La première possibilité est absurde : impossible d'avoir au moins 50 jeunes avec 4 nichées si la moyenne d'une nichée = 10.

Il faudra donc produire au moins 7 nichées !

9. A supposer que le taux de fécondation soit de 60 %, combien de vaches faut-il inséminer pour produire au moins 15 femelles, dans 97,5 % des cas ? Donnez les formules, indiquez la marche à suivre en remplaçant les variables par leurs valeurs (Egale proportion des sexes).

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète (sexe : femelles vs mâles) avec une taille d'échantillon à déterminer (n ?) et une prévalence connue : proba que la fécondation ait fonctionné ET d'être une femelle = 0,6*0,5 = 0,3.

Etant donné la complexité des calculs si on utilise la distribution binomiale sans logiciel, on passera par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On sait que P(r > 15) = 0,975. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse : partir de la probabilité pour trouver notre valeur de Z.

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,975 – 0,5 = 0,475.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,475 est de 1,96. Z1 = -1,96

$$-1{,}96 = \frac{15 - n * 0{,}3}{\sqrt{n * 0{,}3 * 0{,}7}}$$

- ⇨ $-1{,}96 * \sqrt{0{,}21 * n} = 15 - 0{,}3 * n$
- ⇨ $Mise\ au\ carré : (-1{,}96)^2 * 0{,}21 * n = 15^2 + 0{,}09 * n^2 - 2 * 15 * 0{,}3 * n$
- ⇨ $0{,}8067 * n - 225 - 0{,}09 * n^2 + 9 * n = 0$
- ⇨ $-0{,}09 * n^2 + 9{,}8067 * n - 225 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = 9{,}8067^2 - 4 * (-0{,}09) * (-225) = 15{,}17$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-9{,}8067 \pm \sqrt{15{,}17}}{2 * (-0{,}09)} = 32{,}84\ ou\ 76{,}12$$

La première possibilité est absurde : impossible d'avoir au moins 15 femelles avec 33 vaches inséminées si la prévalence d'une femelle est de 0,3.

Il faudra donc inséminer au moins 77 vaches !

10. Dans un test de dépistage de la présence (à l'état hétérozygote) d'une tare récessive chez un reproducteur, on émet l'hypothèse (nulle) que le reproducteur est indemne. Il est ensuite croisé avec 5 femelles hétérozygotes (comment le sait-on ?) afin de tester l'hypothèse nulle. Déterminez α, β et la puissance du test.
Combien faut-il effectuer de croisements afin d'obtenir une puissance de 99% ?

REPONSE :

H0 : Le reproducteur est indemne (RR)

HA : Le reproducteur est porteur hétérozygote de la tare (Rr)

Si, selon H0, le reproducteur est indemne (RR), tous les descendants seront sains :

	R	r
R	RR	Rr
R	RR	Rr

Si, selon HA, le reproducteur est porteur hétérozygote de la tare, 25% des descendants seront atteints :

	R	r
R	RR	Rr
r	Rr	**rr**

On se trouve dans une distribution binomiale : variable discrète (les descendants sont malades ou sains), n est connu (n=5 car 5 croisements) et la prévalence est connue (dans H0 : probabilité d'être atteint = 0 ; dans HA : probabilité d'être atteints = 0,25)

Pour rappel :

$$P(r|n,p) = C_n^r * p^r * q^{(n-r)}$$

On fait la table des distributions :

r (=nombre d'atteint)	H0	HA
0	1	$=C_5^0 * 0{,}25^0 * 0{,}75^{5-0} = 0{,}2373$
1	0	$=C_5^1 * 0{,}25^1 * 0{,}75^{5-1} = 0{,}3955$
2	0	$=C_5^2 * 0{,}25^2 * 0{,}75^{5-2} = 0{,}2637$
3	0	$=C_5^3 * 0{,}25^3 * 0{,}75^{5-3} = 0{,}08789$
4	0	$=C_5^4 * 0{,}25^4 * 0{,}75^{5-4} = 0{,}01465$
5	0	$=C_5^5 * 0{,}25^5 * 0{,}75^{5-5} = 0{,}00097656$

α = probabilité de rejeter H0 quand elle est vraie : On rejette H0 quand la probabilité < 0,05. On rejettera H0 quand r sera = 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5. α = P(r=1 |H0) + P(r=2 |H0) + P(r=3 |H0) + P(r=4 |H0) + P(r=5|H0) = **0.**

β = probabilité d'accepter H0 quand elle est fausse (c'est-à-dire quand HA est vraie) : On accepte H0 quand r = 0. P(r=0 |HA) = 0,2373. Donc β=0,2373

La puissance du test = 1-β = probabilité de rejeter H0 quand elle est fausse (c'est-à-dire quand HA est vraie) = P(r=1 |HA) + P(r=2 |HA) + P(r=3 |HA) + P(r=4 |HA) + P(r=5|HA) = 1-0,2373 = 0,7627

Combien faut-il effectuer de croisements afin d'obtenir une puissance de 99% ?

Pour avoir une puissance de 0,99, il faut que 1-β=0,99 et donc que β=1-0,99 = 0,01

B = P(r=0 |HA) = $C_n^0 * 0{,}25^0 * 0{,}75^{n-0} = 1 * 1 * 0{,}75^n$

- ⇨ $0{,}01 = 0{,}75^n$
- ⇨ $\ln(0{,}01) = n * \ln(0{,}75)$
- ⇨ $n = \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}75)} = 16$

Il faut donc 16 croisements pour avoir une puissance de 99%.

11. Un éleveur espère obtenir des génisses ayant une production supérieure à 5000 litres de lait (en 305 jours de lactation). Il en achète 20 issues d'une lignée où la production moyenne des vaches est de 6000 litres, la déviation standard étant de 750 litres. On suppose que la distribution des productions dans cette lignée a une répartition normale. Quelle est la probabilité qu'une génisse produise minium 5000 litres de lait lors de sa première lactation ? Quelle est la probabilité que, sur les 20 génisses, 5 d'entre elles produisent plus de 6500 litres de lait ?

REPONSE :

a. On se trouve dans une distribution normale. On passe donc par la distribution de Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{5000 - 6000}{750} = -1{,}33$$

P(X > 5000) = P(Z > -1,33).

Dans la table des Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1,33 (ou -1,33 ; symétrie) = 0,4082.

P(Z > -1,33) = P(-1,33 < Z < 0) + P(Z > 0) = 0,4082 + 0,5 **= 0,9082**

b. On se trouve dans une distribution binomiale : variable discrète (production de lait : > 6500 ou <6500) avec une taille d'échantillon connue (n= 20) et une prévalence que l'on peut calculer grâce à la distribution de Z.

On commence donc par calculer la probabilité qu'une génisse produise plus de 6500 litres :

$$Z = \frac{6500 - 6000}{750} = 0{,}667$$

P(X > 6500) = P(Z > 0,667).

Dans la table des Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 0,667 = 0,2486.

P(Z > 0,667) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 0,667) = 0,5-0,2486 = 0,2514.

On peut donc à présent calculer la probabilité que 5 génisses sur 20 produisent plus de 6500 grâce à la distribution binomiale :

$$P(r|n,p) = C_n^r * p^r * q^{(n-r)}$$

$$P(r = 5) = C_{20}^5 * 0{,}2514^5 * (1 - 0{,}2514)^{20-5} = \mathbf{0{,}2023}$$

12. Sachant qu'en moyenne, 50% des oeufs donnent des poussins mâles, combien d'œufs faut-il mettre en incubation pour avoir au moins 20 poulettes dans 95 % des cas ? (2 méthodes).

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète (sexe : femelles vs mâles) avec une taille d'échantillon à déterminer (n ?) et une prévalence connue (proba mâles =0,50)

On sait que P(r > 20) = 0,95.

On peut utiliser la distribution binomiale mais sans logiciel, cela sera long à réaliser. Il faut donc passer par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse : partir de la probabilité pour trouver notre valeur de Z.

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,95 – 0,5 = 0,45.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,45 est de 1,64. Z1 = -1,64

$$-1{,}64 = \frac{20 - n * 0{,}5}{\sqrt{n * 0{,}5 * 0{,}5}}$$

- ⇨ $-1{,}64 * \sqrt{0{,}25 * n} = 20 - 0{,}5 * n$
- ⇨ $Mise\ au\ carré : (-1{,}64)^2 * 0{,}21 * n = 20^2 + 0{,}25 * n^2 - 2 * 20 * 0{,}5 * n$
- ⇨ $0{,}6724 * n - 400 - 0{,}25 * n^2 + 20 * n = 0$
- ⇨ $-0{,}25 * n^2 + 20{,}6724 * n - 400 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = 20{,}6724^2 - 4 * (-0{,}25) * (-400) = 27{,}348$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-20{,}6724 \pm \sqrt{27{,}348}}{2 * (-0{,}25)} = 30{,}88\ ou\ 51{,}80$$

La première possibilité est absurde : impossible d'avoir au moins 20 mâles avec 31 œufs si la prévalence d'un mâle est de 0,5.

Il faudra donc au moins 52 oeufs !

2ème façon : La deuxième possibilité est d'utilisé la distribution binomiale. Il faudrait calculer :

P(r>=20) = 0,95 => 1-P(r<20) = 1-0,95 = 0,05.

On devrait donc calculer les probabilités de r allant de 0 à 19 en choisissant une valeur de n. Faire la somme de ces probabilités et voir où on se situe par rapport à 0,05. Ensuite, on adapte le n en fonction et on procède par essai – erreur. Sans logiciel, cela est un travail très fastidieux.
Avec logiciel : Dans excel :

On calcule la probabilité cumulée de 19 (=P(r<=19)) = LOI.BINOMIALE.N(19 ; N ; 0,5 ; VRAI)
A la place de N, on met une valeur de n au hasard et à nouveau, on l'ajuste pour se retrouver le plus proche possible de 0,05.

En faisant comme cela, vous trouverez qu'il faut 51 œufs.

13. On a pesé le contenu de 250 flacons de pénicilline, ce qui a permis de donner aux paramètres μ et σ les valeurs suivantes: μ = 126 mg et σ = 4 mg. La population est supposée normale. Le sel de pénicilline utilisé titre 1600 unités par mg. L'activité annoncée sur l'étiquette est de 200000 unités, et, pour obéir aux prescriptions du Codex, l'activité contenue réellement dans le flacon doit être égale à au moins 95% de celle qui est renseignée sur l'étiquette. Quelle proportion de lots sera inférieure à ce poids ?

REPONSE :

Le poids annoncé = 1600/200000 = 125mg.
Le poids requis selon le Codex = 0,95*125 = 118,75 mg.

Il faut donc calculer la probabilité d'avoir un poids inférieur à 118,75 si on est dans la population normale (μ = 126 mg et σ = 4 mg). On se trouve dans une distribution normale. On calcule la statistique Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{118{,}75 - 126}{4} = -1{,}8125$$

P(X < 118,75) = P(Z < -1,8125).

Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1,81 (ou -1,81) = 0,4649.
P(X < 118,75) = P(Z < -1,8125) = P(Z < 0) – P(-1,8125 < Z < 0) = 0,4 – 0,4649 = 0,0351

La proportion de lots inférieure à ce poids est donc 0,0351.

14. Trouvez la probabilité de :
    a) de $P(-1 < Z < 1)$.
    b) de $P(-1{,}96 < Z < 1{,}64)$.
    c) de $P(-2{,}33 < Z < 2{,}33)$.
    d) de $P(-1{,}64 < Z < 3)$.
    e) qu'une variable normale standardisée soit comprise entre –2 et –1.
    f) qu'une variable normale standardisée soit comprise entre –2,5 et –1,2.
    g) qu'une variable normale standardisée soit supérieure à 3,02.
    h) qu'une variable normale standardisée soit supérieure à –0,6.

Faites une représentation graphique pour chaque situation

REPONSE :

a) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1 = 0,3413. Comme la distribution est symétrique, la probabilité d'être entre 0 et -1 = 0,3413.
Donc, $P(-1 < Z < 1) = 0{,}3413+0{,}3413 = 0{,}6826$

b) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1,64 = 0,4495. De plus, la probabilité d'être entre 0 et 1,96 (ou -1,96) = 0,4750.
Donc, $P(-1{,}96 < Z < 1{,}64) = 0{,}4495+0{,}4750 = 0{,}9245$

c) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 2,33 = 0,4901. Comme la distribution est symétrique, la probabilité d'être entre 0 et -2,33 = 0,4901.
$P(-2{,}33 < Z < 2{,}33) = 0{,}4901*2 = 0{,}9802$

d) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1,64(ou -1,64) = 0,4495. De plus, la probabilité d'être entre 0 et 3 = 0,4987.
$P(-1{,}64 < Z < 3) = 0{,}4495+0{,}4987 = 0{,}9482$

e) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1 (ou -1) = 0,3413. De plus, la probabilité d'être entre 0 et 2 (ou -2) = 0,4772.
$P(-2 < Z < -1) = P(-2 < Z < 0) – P(-1 < Z < 0) = 0{,}4772-0{,}3413 = 0{,}1359$

f) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 2,5 (ou -2,5) = 0,4938. De plus, la probabilité d'être entre 0 et 1,2 (ou -1,2) = 0,3849.
$P(-2{,}5 < Z < -1{,}2) = P(-2{,}5 < Z < 0) – P(-1{,}2 < Z < 0) = 0{,}4938 – 0{,}3849 = 0{,}1089$

g) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 3,02 = 0,4987.
$P(Z > 3{,}2) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 3{,}2) = 0{,}5-0{,}4987 = 0{,}0013$

h) Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 0,6 (ou -0,6) = 0,2257.
$P(Z > -0{,}6) = P(-0{,}6< Z < 0) + P(Z > 0) = 0{,}2257 + 0{,}5 = 0{,}7257$.

15. Un outil de mesure est calibré de telle sorte que les erreurs de mesure soient distribuées normalement avec une moyenne 0 et une déviation standard de 1. Trouvez la probabilité qu'une erreur se situe entre –2 et 2. Faites une représentation graphique.

REPONSE :

On se trouve dans une distribution normale. On passe donc par la distribution de Z. Par définition, la distribution de Z a pour moyenne 0 et pour déviation standard 1. La distribution des erreurs correspond donc à une distribution de Z.

Il faut donc calculer $P(-2 < Z < 2)$. On va dans la table des Z et on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 2 (ou -2) = 0,4772.

$P(-2 < Z < 2) = 0{,}4772 * 2 = 0{,}9544$

16. Si X suit une distribution $N(-44,16^2)$, quelle est la probabilité que X soit supérieur à 0 ? Faites une représentation graphique.

REPONSE :

On se trouve dans une distribution normale. La notation $N(-44, 16^2)$ signifie que nous sommes dans une distribution normale avec pour moyenne = -44 et pour variance = 16^2.

On passe donc par la distribution de Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{0 - (-44)}{16} = 2{,}75$$

$P(X > 0) = P(Z > 2{,}75)$.

On trouve dans la table des Z que la probabilité d'être entre 0 et 2,75 = 0,4970.

$P(X > 0) = P(Z > 2{,}75) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 2{,}75) = 0{,}5 - 0{,}4970 = 0{,}003$

17. Une automobile a une consommation en essence sur autoroute qui est distribuée normalement avec une moyenne et une déviation inconnues. Le fabriquant sait, toutefois, que 80% du temps, la voiture consomme plus de 8 litres au 100 km et que 40% du temps, elle consomme plus de 9 litres au 100 km. Trouvez la moyenne et la déviation standard de la consommation en essence sur autoroute de cette voiture.

REPONSE :

On se trouve dans une distribution normale. On passe par Z. Ici, on a la probabilité et on cherche les paramètres de la distribution normale. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse.

Ce qu'on sait :
P(X > 8) = 0,80
P(X > 9) = 0,40

On va chercher dans la table, à quelles valeurs de Z correspondent ces probabilités.

Concernant 0,80 :

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,80 – 0,5 = 0,30. Cela correspond à un Z = - 0,85

Concernant 0,40 :

On peut déjà déduire que Z sera positif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est inférieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté droit de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(0 < Z < z1) = P(Z > 0) - P(Z > z1) = 0,50 – 0,40 = 0,10. Cela correspond à un Z = 0,26

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On a donc deux équations à deux inconnues :

$$-0{,}85 = \frac{8 - \mu}{\sigma}$$

$$0{,}26 = \frac{9 - \mu}{\sigma}$$

- ⇨ $\mu = 0{,}85 * \sigma + 8$
- ⇨ $Remplacer\ \mu\ dans\ la\ seconde\ équation :\ 0{,}26 = \frac{9-(0{,}85*\sigma+8)}{\sigma}$
  - ⇨ $0{,}26 * \sigma = 1 - 0{,}85 * \sigma$
  - ⇨ $0{,}26 * \sigma + 0{,}85 * \sigma = 1$

⇨ $\sigma = \frac{1}{1{,}11} = \mathbf{0{,}9}$

A présent, on peut calculer la moyenne :

⇨ $\mu = 0{,}85 * \sigma + 8 = 0{,}85 * 0{,}9 + 8 = \mathbf{8{,}765}$

18. A supposer que le taux de fécondation des juments soit de 60% et qu'il existe une égale proportion des sexes à la naissance, combien de juments faut-il inséminer pour obtenir 20 pouliches dans 97,5% des cas ? (Indiquez la marche à suivre et les formules)

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète (sexe : femelles vs mâles) avec une taille d'échantillon à déterminer (n ?) et une prévalence connue : proba que la fécondation ait fonctionné ET d'être une femelle = 0,6*0,5 = 0,3.

Etant donné la complexité des calculs si on utilise la distribution binomiale sans logiciel, on passera par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On sait que P(r > 20) = 0,975. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse : partir de la probabilité pour trouver notre valeur de Z.

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,975 – 0,5 = 0,475.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,475 est de 1,96. Z1 = -1,96

$$-1{,}96 = \frac{20 - n * 0{,}3}{\sqrt{n * 0{,}3 * 0{,}7}}$$

- ⇨ $-1{,}96 * \sqrt{0{,}21 * n} = 20 - 0{,}3 * n$
- ⇨ $Mise\ au\ carré : (-1{,}96)^2 * 0{,}21 * n = 20^2 + 0{,}09 * n^2 - 2 * 20 * 0{,}3 * n$
- ⇨ $0{,}8067 * n - 400 - 0{,}09 * n^2 + 12 * n = 0$
- ⇨ $-0{,}09 * n^2 + 12{,}8067 * n - 400 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = 12{,}8067^2 - 4 * (-0{,}09) * (-400) = 20{,}012$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-12{,}8067 \pm \sqrt{20{,}012}}{2 * (-0{,}09)} = 46{,}29\ ou\ 96$$

La première possibilité est absurde : impossible d'avoir au moins 20 pouliches avec 47 juments inséminées si la prévalence d'une femelle est de 0,3.

Il faudra donc inséminer au moins 96juments !

19. Sachant qu'en moyenne, 50% des œufs donnent des poussins mâles mais que durant la phase de croissance jusqu'à la mise à la reproduction, il y a 15% de mortalité, combien d'œufs faut-il mettre en incubation pour obtenir 100 poules reproductrices dans 99,9% des cas ?

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète (sexe : femelles vs mâles) avec une taille d'échantillon à déterminer (n ?) et une prévalence connue : proba d'être vivant ET d'être un mâle = (1-0,15)*0,5 = 0,425.

Etant donné la complexité des calculs si on utilise la distribution binomiale sans logiciel, on passera par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On sait que P(r > 100) = 0,999. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse : partir de la probabilité pour trouver notre valeur de Z.

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,999 – 0,5 = 0,499.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,499 est de 3,1. Z1 = -3,1

$$-3{,}1 = \frac{100 - n * 0{,}425}{\sqrt{n * 0{,}425 * 0{,}575}}$$

- ⇨ $-3{,}1 * \sqrt{0{,}24 * n} = 100 - 0{,}425 * n$
- ⇨ $Mise\ au\ carré : (-3{,}1)^2 * 0{,}24 * n = 100^2 + 0{,}18 * n^2 - 2 * 100 * 0{,}425 * n$
- ⇨ $2{,}348 * n - 100^2 - 0{,}18 * n^2 + 85 * n = 0$
- ⇨ $-0{,}18 * n^2 + 87{,}348 * n - 10000 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = 87{,}348^2 - 4 * (-0{,}18) * (-10000) = 429{,}75$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-87{,}348 \pm \sqrt{429{,}75}}{2 * (-0{,}18)} = 185\ ou\ 300$$

La première possibilité est absurde : impossible d'avoir au moins 100 poussins mâles avec 187 œufs incubés si la prévalence d'un mâle est de 0,425.

Il faudra donc incuber au moins 300 œufs !

20. Supposons que nous échantillonnions au sein d'une population de variance 1000000. Nous souhaitons que la déviation standard de la moyenne d'échantillon soit d'au moins 25. Quelle est la taille minimum de l'échantillon qui doit être utilisée ?

REPONSE :

Pour rappel la déviation standard de la moyenne = erreur standard = $\frac{s}{\sqrt{n}}$

- ⇨ $25 = \frac{\sqrt{1000000}}{\sqrt{n}}$
- ⇨ $\sqrt{n} = \frac{\sqrt{1000000}}{25}$
- ⇨ $n = \frac{1000000}{25^2} = 1600$

n = 1600

21. La déviation d'une aiguille magnétisée par rapport au pôle magnétique est distribuée normalement avec une moyenne 0 et une déviation standard de 1,2. Trouvez la probabilité que la valeur absolue de la déviation par rapport au pôle nord à un moment donné soit supérieure à 2,4.

REPONSE :

On se trouve dans une distribution normale. On passe donc par la distribution de Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$Z = \frac{2,4 - 0}{1,2} = 2$

P(-2,4 < X) + P(X > 2,4) = P(Z < -2) + P(Z > 2).

On trouve dans la table des Z que la probabilité d'être entre 0 et 2 = 0,4772.

P(-2,4 < X) = P(Z < -2) = P(Z < 0) – P(-2 < Z < 0) = 0,5 – 0,4772= 0,0228

P(X > 2,4) = P(Z > 2) = P(Z > 0) – P(0 > Z > 2) = 0,5 – 0,4772= 0,0228

P(-2,4 < X) + P(X > 2,4) = 0,0228+0,0228 = 0,0456

22. Si X suit une distribution N(500,20²), quelle est la probabilité que X soit supérieure à 555 ?

REPONSE :

On se trouve dans une distribution normale. La notation N(500, 20²) signifie que nous sommes dans une distribution normale avec pour moyenne = 500 et pour variance = 20².

On passe donc par la distribution de Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{555 - 500}{20} = 2{,}75$$

P(X > 555) = P(Z > 2,75).

On trouve dans la table des Z que la probabilité d'être entre 0 et 2,75 = 0,4970.

P(X > 0) = P(Z > 2,75) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 2,75) = 0,5 – 0,4970 = 0,003

23. Le pourcentage de protéines contenu dans une certaine marque d'aliments pour chiens est distribuée normalement avec une moyenne de 11,2% et une déviation standard de 0,6%. Le fabriquant voudrait signaler sur l'emballage que le produit contient au moins x1% de protéines et pas plus de x2% de protéines. Il souhaite que cela soit vrai pour 99% des sacs vendus.
Déterminez x1 et x2.

REPONSE :

On nous demande de trouver x1 et x2 pour que P(x1 < X < x2) = 0,99.

On est dans une distribution normale. On va donc passer par la statistique Z. On a une probabilité et on veut trouver une valeur de X. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse. De plus étant donné que la distribution de Z est symétrique, la probabilité d'être entre x1 et X est égale à la probabilité d'être entre x2 et X. La seule différence sera le signe de Z.

P(x1 < X) = 0,99/2 = 0,495 = P(z1 < 0)

Dans la table, on trouve qu'une probabilité de 0,495 est associée à un Z = 2,58. Donc z1 = -2,58 et z2=2,58.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z1 = \frac{X1 - 11{,}2}{0{,}6} = -2{,}58$$

⇨ $X1 = -2{,}58 * 0{,}6 + 11{,}2 = \mathbf{9{,}652}$

$$Z2 = \frac{X2 - 11{,}2}{0{,}6} = 2{,}58$$

⇨ $X2 = 2{,}58 * 0{,}6 + 11{,}2 = \mathbf{12{,}748}$

24. Dans l'espèce bovine, le sex ratio est de 0,5 et la viabilité post-natale de 80%. Un éleveur souhaiterait savoir combien de vaches doivent vêler pour obtenir au minimum 10 veaux femelles vivants dans 99% des cas.

REPONSE :

On se trouve dans une distribution binomiale : distribution discrète (sexe : femelles vs mâles) avec une taille d'échantillon à déterminer (n ?) et une prévalence connue : proba d'être vivant ET d'être une femelle = 0,8*0,5 = 0,4.

Etant donné la complexité des calculs si on utilise la distribution binomiale sans logiciel, on passera par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

On sait que P(r > 10) = 0,99. On va donc utiliser la table de Z dans le sens inverse : partir de la probabilité pour trouver notre valeur de Z.

On peut déjà déduire que Z sera négatif: on a la probabilité d'être supérieure à une valeur ET cette probabilité est supérieure à 0,5 ; on se trouve donc du côté gauche de la distribution.

Dans la table de Z, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z => P(-z1 < Z < 0) = P(Z > -z1) – P(Z > 0) = 0,99 – 0,5 = 0,49.

Dans la table, le Z associé à une probabilité de 0,49 est de 2,33. Z1 = -2,33

$$-2{,}33 = \frac{10 - n * 0{,}40}{\sqrt{n * 0{,}40 * 0{,}60}}$$

- ⇨ $-2{,}33 * \sqrt{0{,}24 * n} = 10 - 0{,}40 * n$
- ⇨ $Mise\ au\ carré : (-2{,}33)^2 * 0{,}24 * n = 10^2 + 0{,}16 * n^2 - 2 * 10 * 0{,}40 * n$
- ⇨ $1{,}303 * n - 10^2 - 0{,}16 * n^2 + 8 * n = 0$
- ⇨ $-0{,}16 * n^2 + 9{,}303 * n - 100 = 0$

On se trouve devant une équation du second degré :

$$\delta = b^2 - 4 * a * c = 9{,}303^2 - 4 * (-0{,}16) * (-100) = 22{,}5446$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2 * a} = \frac{-9{,}303 \pm \sqrt{22{,}54}}{2 * (-0{,}16)} = 14{,}23\ ou\ 43{,}9$$

La première possibilité est absurde : impossible d'avoir au moins 10 veaux mâles avec 15 vêlages si la prévalence d'un mâle est de 0,40.

Il faudra donc que 44 vaches vêlent.

25. Sachant que le pourcentage de graisses dans le corps d'un chien peut être approximativement représenté par une variable normale de moyenne 15% et de déviation standard 3% et qu'un pourcentage de graisses supérieur ou égal à 20% caractérise le chien d'obèse, quelle est la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 20 chiens comptent moins de 4 chiens obèses ?

REPONSE :

D'abord, nous allons calculer la probabilité qu'un chien ait un pourcentage de graisses supérieur ou égale à 20%. Pour cela, comme on est dans une distribution normale, on utilise la distribution de Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{20 - 15}{3} = 1{,}667$$

P(X > 20) = P(Z > 1,667).

Dans la table de Z, on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 1,667 = 0,4525

P(X > 20) = P(Z > 1,667) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 1,667) = 0,5-0,4525 = 0,0475

A présent, nous souhaitons savoir quelle est la probabilité que dans un échantillon de 20 chiens moins de 4 chiens aient un pourcentage de graisse supérieure à 20. Dans ce cas-ci, on est dans une distribution binomiale : variable discrète (pourcentage de graisse supérieur ou inférieure à 20) avec un taille d'échantillon connue (n=20) et une prévalence d'un pourcentage de graisse supérieure à 20% connu = 0,0475

On peut donc utiliser la distribution binomiale :

$$P(r|n,p) = C_n^r * p^r * q^{n-r}$$

P(r < 4) = P(r=0) + P(r=1) + P(r=2) + P(r=3)

$$P(r = 0) = C_{20}^0 * 0{,}0475^0 * (1 - 0{,}0475)^{20-0} = 0{,}3778$$

$$P(r = 1) = C_{20}^1 * 0{,}0475^1 * (1 - 0{,}0475)^{20-1} = 0{,}3768$$

$$P(r = 2) = C_{20}^2 * 0{,}0475^2 * (1 - 0{,}0475)^{20-2} = 0{,}1758$$

$$P(r = 3) = C_{20}^3 * 0{,}0475^3 * (1 - 0{,}0475)^{20-3} = 0{,}053$$

P(r < 4) = 0,3778 + 0,3768 + 0,1758 + 0,053 = 0,9866

OU on peut passer par l'approximation normale :

$$Z = \frac{r - n * p}{\sqrt{npq}}$$

$$Z = \frac{3 - 20 * 0{,}0475}{\sqrt{20 * 0{,}0475 * (1 - 0{,}0475)}} = 2{,}15$$

P(r < 4) = P(Z < 2,15).

On va dans la table des Z et on trouve que la probabilité d'être entre 0 et 2,15 = 0,4842

P(r < 4) = P(Z < 2,15) = P(0 < Z < 2,15) + P(Z < 0) = 0,4842+0,5 = 09842

26. La durée de la gestation dans l'espèce féline, basée sur les dosages hormonaux, est en moyenne de 63 jours avec une déviation standard de 2. Si un éleveur souhaite savoir la proportion de chattes dont la durée de gestation sera supérieure à 66 jours ? Donnez l'intervalle de confiance à 95% de la date d'accouchement.

REPONSE :

a) On se trouve dans une distribution normale. On utilise la statistique Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{66 - 63}{2} = 1,5$$

P(X > 66) = P(Z > 1,5).
On va dans la table des Z et on trouve que la probabilité de se trouver entre 0 et 1,5 = 0,4332

P(X > 66) = P(Z > 1,5) = P(Z > 0) – P(0 < Z < 1,5) = 0,5-0,4332 = **0,0668**

b) L'intervalle de confiance à 95% correspond à calculer une limite inférieure pour laquelle 2,5% des données seront inférieures à cette valeur et une limite supérieure pour laquelle 2,5% des données seront supérieures à cette valeur. Cela signifie que 95% des données se trouvent entre ces 2 valeurs.

Limite inférieure = P(X < X1) = 0,025

On utilise la table des Z dans le sens inverse. En effet, on a une probabilité et on veut trouver une valeur de X.
Dans la table, on nous donne la probabilité d'être entre 0 et Z. Donc, on doit chercher à :
P(Z < z1) = 0,025 ➔ P(z1 < Z < 0) = P(Z < 0) – P(Z < z1) = 0,5 – 0,025 = 0,475

La valeur de Z associée à 0,475 = 1,96. Comme on cherche la limite inférieure, on sait que cette valeur sera négative = -1,96

$$Z1 = \frac{X1 - 63}{2} = -1,96$$

⇨ $X1 = -1,96 * 2 + 63 = 59,08$

Limite supérieure = P(X > X1) = 0,025

Comme la table de Z est symétrique, on en déduit que Z2 = 1,96.

$$Z2 = \frac{X2 - 63}{2} = 1,96$$

⇨ $X2 = 1,96 * 2 + 63 = 66,92$

Il y a donc 95% de chances que la date d'accouchement se situe entre 59,08 et 66,92 jours.